Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2017/2018 учебного года

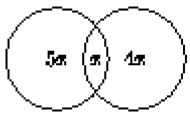
Математика

8 класс

1. По данным социологического опроса, проведенного в 7 "Я" классе, выяснилось, что 20% школьников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% школьников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 "Я", если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Решение

Количество человек в 7 "Я" без учета Пети и Васи превышает 18, но меньше 28. Пусть n школьников интересуются одновременно и математикой и физикой. Тогда всего математикой интересуются $5n$, а физикой – $4n$ школьников. Значит, математикой или физикой интересуются $5n + 4n - n = 8n$ школьников (см. рис.).



В указанных границах есть только одно число, кратное восьми. Следовательно, $8n = 24$, а всего в классе – 26 школьников.

Ответ 26 человек.

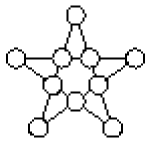
2. Вдоль школьного коридора висит новогодняя гирлянда, состоящая из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Решение

Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Можно считать, что первая лампочка – красная. Поскольку рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трех последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем $48 : 3 = 16$. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут. Итак, синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17. Такой случай возможен: если лампочки с номерами 2, 5, 8, 11, ..., 50 – синие, а остальные – красные, то в гирлянде – 33 красные лампочки.

Ответ 33 лампочки.

3. Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырех чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?



Решение

Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S – сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$. Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, то при таком подсчете число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, то есть, $5S = 2(4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3)$. Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа и их сумма должна быть целой.

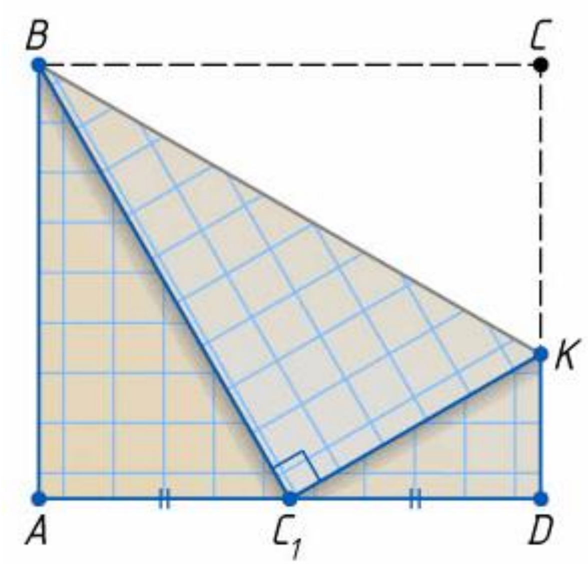
Ответ нет, нельзя.

4. Докажите, что если обозначить две любые цифры буквами X и A, то шестизначное число $XAXAXA$ делится на 7 без остатка.

Решение

$\overline{XAXAXA}=\overline{XA}\cdot 10000+\overline{XA}\cdot 100+\overline{XA}=\overline{XA}\cdot 10101$. Так как $10101=7\cdot 1443$, то $XAXAXA$ делится на 7 без остатка.

5. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $DK : AB$, если C_1 – середина AD.



Решение

$AC_1 = DC_1 = ½\ AD$. Треугольники BC_1K и BCK равны, значит, $BC_1 = BC$. В прямоугольном треугольнике ABC_1 катет AC_1 равен половине гипотенузы BC_1, значит, $\angle ABC_1 = 30°$. Поэтому $\angle AC_1B = 60°$, $\angle DC_1K = 180° – 60° – 90° = 30°$. В прямоугольном треугольнике KDC_1 катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, то есть $DK = ½\ C_1K = ½\ CK$, а так как $DK + CK = CD$, то $DK = {}^1/_3\ CD$.

Ответ 1 : 3.